Études des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 : concordance et discordance par rapport à trois formes d'analogies

Catherine Rivier, Calliste Scheibling-Seve, Emmanuel Sander

Dans Revue française de pédagogie 2022/3 (n° 216), pages 101 à 116
Éditions ENS Editions

ISSN 0556-7807
DOI 10.4000/rfp.12131

REVUE FRANÇAISE DE PÉDAGOGIE

Revue française de pédagogie
Recherches en éducation

216 | 2022
Varia

Études des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 : concordance et discordance par rapport à trois formes d'analogies

Study of verbal arithmetic problems in 12 French textbooks: Congruence and incongruence in relation to three kinds of analogies

Catherine Rivier, Calliste Scheibling-Sève et Emmanuel Sander

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : https://journals.openedition.org/rfp/12131
DOI : 10.4000/rfp.12131
ISSN : 2105-2913

Éditeur
ENS Éditions

Édition imprimée
Date de publication : 15 décembre 2022
Pagination : 101-116
ISSN : 0556-7807

Distribution électronique Cairn

CAIRN.INFO
MATIÈRES À RÉFLEXION

Référence électronique
Catherine Rivier, Calliste Scheibling-Sève et Emmanuel Sander, « Études des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 : concordance et discordance par rapport à trois formes d'analogies », *Revue française de pédagogie* [En ligne], 216 | 2022, mis en ligne le 01 janvier 2027, consulté le 06 mars 2023. URL : http://journals.openedition.org/rfp/12131 ; DOI : https://doi.org/10.4000/rfp.12131

Études des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 : concordance et discordance par rapport à trois formes d'analogies

Catherine Rivier
Calliste Scheibling-Sève
Emmanuel Sander

Cette étude a pour objectif d'analyser les caractéristiques de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans des manuels scolaires aux élèves de cycle 2 (6 à 9 ans) en France. 3 134 énoncés issus de douze manuels ont été catégorisés selon leur concordance ou discordance sur le plan des analogies de substitution, de scénario et de simulation. Les résultats montrent que certains types de problèmes sont sous-représentés et révèlent une répartition hétérogène des taux de concordance et de discordance selon le type d'analogie, le niveau scolaire, le manuel scolaire et l'opération arithmétique impliquée dans la résolution. Ces résultats sont discutés pour leurs implications dans l'enseignement du sens des opérations.

Mots clés (TESE) : manuel d'enseignement, résolution de problème, apprentissage, mathématiques

Contexte théorique

Par l'analyse des problèmes arithmétiques à énoncés verbaux présents dans les manuels scolaires, cette recherche propose d'examiner la diversité des énoncés rencontrés par les élèves en France durant les trois années du cycle 2, du CP au CE2 (6-9 ans). La résolution d'un problème arithmétique à énoncé verbal nécessite la construction d'une représentation mentale de la situation décrite par l'énoncé, mettant en relation les données du problème, qui conduit éventuellement à la mise en œuvre d'un ou plusieurs calculs. Alors qu'une littérature abondante existe sur les typologies de problèmes en psychologie de l'éducation et en didactique des mathématiques (Greer, 1992 ; Riley, Greeno & Heller, 1983 ; Vergnaud, 1982), les contenus des manuels scolaires en France dans le domaine de la résolution de problèmes n'ont pas à notre connaissance été analysés selon ce prisme. En parallèle des études sur la structure mathématique des énoncés, des recherches en psychologie expérimentale visent à identifier les processus cognitifs à l'œuvre dans les tâches de résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux (pour des revues, voir Gros, Thibaut & Sander, 2020 ; Thevenot & Barrouillet, 2015).

Théories de la résolution de problèmes

La théorie des schémas (Kintsch & Greeno, 1985) affirme que, pour résoudre un problème, un élève mobilise un schéma stocké en mémoire reflétant la structure mathématique de l'énoncé, dans lequel il complète avec les données de l'énoncé les cases vides de ce schéma. Le problème est alors résolu sauf si l'élève a mobilisé un schéma erroné. Selon cette théorie, les performances des élèves croissent ainsi avec l'âge et l'apprentissage puisque les schémas disponibles en mémoire se consolident et que leur quantité augmente. Cependant, des travaux ont montré que des modifications mineures dans la formulation de problèmes structurellement identiques conduisent à des différences de réussite importantes (De Corte, Verschaffel & Win, 1985 ; Gros, Thibault & Sander, 2020 ; Hudson, 1983). Ainsi, Hudson (1983) a reformulé l'énoncé « Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien y a-t-il de plus d'oiseaux que de vers » en « Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ? », conduisant à un taux de réussite d'élèves de 6 ans accru de 63 % à 100 %. Ces effets de reformulation ne sont pas considérés par la théorie des schémas. Coquin-Viennot et Moreau (2003) ont par ailleurs montré que la présence d'un terme (bouquet) structurant les éléments de l'énoncé (roses et tulipes) augmente le recours à une stratégie de factorisation par rapport à une stratégie de développement. L'introduction d'un tel terme favorise la représentation mentale du regroupement de deux sous-ensembles sans toutefois intervenir sur le plan du schéma du problème activé. De tels résultats suggèrent que des processus interprétatifs entrent en jeu et modulent les performances des élèves, suggérant la nécessité d'un modèle prenant en compte ces effets de formulation, peu documentés dans la théorie des schémas (Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Scheibling-Sève, Pasquinelli & Sander, 2020).

Contrairement à la théorie des schémas, la théorie des modèles mentaux, initiée par Johnson-Laird (1983), considère que la mise en œuvre d'une stratégie de résolution ne repose pas sur l'existence d'une structure abstraite de type schéma. Mettant l'accent sur la compréhension du texte de l'énoncé, cette théorie fait l'hypothèse que le lecteur construit une représentation de la situation décrite dans cet énoncé, homologue à une situation réelle ou imaginaire. Un tel modèle mental précise notamment les agents, les actions et les relations entre les entités du problème (Staub & Reusser, 1995). Ainsi, l'élève s'appuie sur ce modèle mental initial pour résoudre le problème. Cette approche n'intègre toutefois pas les processus interprétatifs liés aux connaissances préalables de l'élève (Bassok, Wu & Olseth, 1995), dont on peut pourtant s'attendre à ce qu'ils influent sur la construction du modèle mental initial.

À cette fin, Gros, Thibaut et Sander (2020) proposent le modèle SECO (SEmantic COngruence, acronyme anglais pour *Congruence Sémantique*), qui intègre l'influence de la sémantique sur les représentations et les stratégies mises en œuvre et montre l'influence sur la résolution du fait que la sémantique du problème induise (en cas de congruence) ou non (en cas de non-congruence) une stratégie qui mène à la solution. Ainsi, SECO défend l'idée que l'interprétation d'un énoncé varie selon les connaissances mathématiques et extra-mathématiques des élèves. Ce modèle place comme centrale sur le plan des apprentissages l'activité de recodage sémantique, qui permet de surmonter une inadéquation entre la représentation première et la représentation qui serait adéquate pour mobiliser une procédure menant à la solution. Dans SECO, la sémantique du monde, issue de l'expérience quotidienne, et la sémantique mathématique sont mises en correspondance et conduisent à interpréter une structure dans laquelle les éléments du problème se voient attribuer certains rôles. De cette structure interprétée peut dériver une stratégie de résolution. En effet, un élève est susceptible de mobiliser des connaissances acquises dans des contextes divers, scolaires ou extra-scolaires, et il est utile – parce qu'elles vont interférer avec les apprentissages nouveaux – de les prendre en compte pour guider les apprentissages et en comprendre les difficultés (Fischbein, 1987 ; Sander, 2017). Ainsi, selon la théorie des modèles tacites (Fischbein, 1989, 1994) ainsi que celle des métaphores conceptuelles (Lakoff & Nuñez, 2000), les conceptions des élèves sont contraintes par leurs connaissances extra-mathématiques. Notamment, pour Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985, p. 4), « chaque opération arithmétique reste généralement attachée à un modèle intuitif, primitif, implicite et inconscient. L'identification de l'opération nécessaire pour résoudre un problème […] n'est pas directe, mais est faite par l'intermédiaire du modèle ». Le recours à ces modèles est privilégié dans les raisonnements mathématiques car ils sont simples et peu coûteux cognitivement. En outre, ils perdurent même lorsque la notion a fait l'objet d'un enseignement (Tirosh & Graeber, 1991). De même, selon Lakoff et Nuñez (2000), des métaphores constitutives des notions mathématiques prennent naissance dans l'expérience concrète et sont peu dépendantes de l'instruction scolaire. À chaque opération arithmétique correspond donc une conception intuitive, directement applicable en termes d'action parce que fruit d'expériences concrètes répétées (Fischbein, 1994). Ces conceptions sont opérantes dans un ensemble considérable de situations mais sont aussi obstructives hors de cet ensemble. Le caractère opérant ou non de ces conceptions peut être expliqué par les analogies qu'elles induisent chez un élève.

Parce que l'analogie est un mécanisme psychologique adaptatif fondé sur la référence au connu pour appréhender la nouveauté, rendant possible de comprendre une situation dans les termes d'une autre (Holyoak & Thagard, 1995), Sander (2018 ; Sander, Rivier & Naud, 2022) identifie trois formes d'analogies intuitives constituant des facteurs d'influence dans les processus de résolution de problèmes à énoncés verbaux. S'inscrivant dans le cadre théorique A-S3 (pour Analogies de Substitution, de Scénario et de Simulation), ces trois types d'analogies – qui sont présentées dans les sections suivantes – reposent sur des connaissances extra-mathématiques des élèves, construites en amont de leur scolarisation. Ces analogies sont facilitatrices pour la résolution lorsqu'elles conduisent à des inférences pertinentes pour la résolution du problème et obstructives dans le cas inverse. Lorsqu'elles sont obstructives, elles doivent être surmontées pour aboutir à la solution.

Alors que les travaux antérieurs se sont focalisés soit sur la mise en évidence de typologies de problèmes propres aux opérations arithmétiques concernées, qu'il s'agisse du champ additif (par exemple Nesher, Greeno & Heller, 1981 ; Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983) ou du champ multiplicatif (par exemple Greer, 1992 ; Vergnaud, 1988), soit sur les processus en jeu (par exemple Kintsch & Greeno, 1985 pour la théorie des schémas ou Reusser, 1990 pour celle des modèles mentaux), le cadre A-S3 s'appuie sur l'identification de trois facteurs, qui sont autant de formes d'analogies, dont l'influence sur la résolution a été montrée par différentes études expérimentales. Ce cadre est transversal aux différentes opérations mathématiques et offre l'intérêt de permettre d'identifier si les connaissances extra-mathématiques impliquées dans l'énoncé favorisent ou non la réussite au problème. Il donne l'opportunité d'introduire des activités de classe incluant des énoncés dont la sémantique soutient plus ou moins la résolution du problème. Pour aboutir à une conceptualisation satisfaisante des notions mathématiques travaillées, un enjeu majeur pour les apprentissages est en effet que les élèves puissent résoudre des problèmes qui relèvent de situations tant concordantes que discordantes. Il s'agit en particulier d'apprendre à décontextualiser les stratégies de résolution et à être le moins possible tributaire de contextes uniquement concordants (Sander, Rivier & Naud, 2022). Sans présenter et discuter de manière extensive le cadre A-S3 qui l'est déjà par ailleurs (Sander, 2018 ; Sander, Rivier & Naud, 2022), nous allons maintenant préciser ce qu'il est entendu par chacune de ces formes d'analogies.

Les analogies de substitution

Une analogie de substitution se caractérise par le fait qu'une connaissance préalable de l'élève se substitue à la notion mathématique concernée. L'analogie de substitution s'inscrit ainsi dans un certain domaine de validité au sein duquel conception intuitive et notion mathématique coïncident (Sander, 2008). Lorsque c'est le cas, le recours à l'analogie engendre une inférence facilitatrice dans le processus de résolution. À l'inverse, lorsque la situation décrite par l'énoncé se situe hors du domaine de validité de l'analogie, le recours à la conception intuitive devient obstructif à la résolution. À chaque opération arithmétique correspond donc une conception intuitive, directement applicable en termes d'action parce que fruit d'expériences concrètes répétées. Ces conceptions sont opérantes dans un ensemble considérable de situations mais sont aussi

Tableau 1. Taux de réussite en fonction du type de problème et du niveau scolaire pour deux énoncés additifs et deux énoncés soustractifs

Énoncés	Taux de réussite des élèves de Grade 1 (6-7 ans)
Concordants	
Joe a 3 billes. Tom a 5 billes. Combien de billes ont-ils ensemble ?	100 %
Joe avait 8 billes. Il a perdu 5 billes. Combien de billes reste-t-il à Joe ?	100 %
Discordants	
Joe avait des billes. Il en a donné 5 à Tom. Maintenant, Joe a 3 billes. Combien Joe avait-il de billes au début ?	39 %
Joe avait des billes. Tom lui en a donné 5. Maintenant, Joe a 8 billes. Combien Joe avait-il de billes au début ?	28 %

Source : tableau original construit à partir des tables 4.3 et 4.5 du chapitre 4 de Riley, Greeno & Heller (1983).

obstructives hors de cet ensemble, alors même que la notion mathématique à mobiliser est identique.

Ainsi, l'analogie de substitution de l'addition est celle de l'ajout, de la réunion de deux parties, par exemple « Joe a 3 billes. Tom a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ? », tandis que celle de la soustraction correspond à la perte, au retrait, avec recherche de la quantité subsistante, par exemple « Joe avait 8 billes. Il perd 5 billes. Combien de billes reste-t-il à Joe ? » (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000). Dès lors, le recours à ces analogies de substitution conduit à ce que des élèves se trouvent en difficulté lorsqu'il leur est demandé de résoudre avec une addition des problèmes de transformation où l'on ne fait que perdre (« Joe avait des billes. Il en a donné 5 à Tom. Maintenant, Joe a 3 billes. Combien Joe avait-il de billes au début ? »), ou encore de résoudre avec une soustraction un problème de transformation où l'on ne fait que gagner (« Joe avait des billes. Tom lui en a donné 5. Maintenant, Joe a 8 billes. Combien Joe avait-il de billes au début ? ») (Riley, Greeno & Heller, 1983). Le tableau 1 présente les taux de réussite d'élèves de 6-7 ans pour ces quatre énoncés (Riley, Greeno & Heller, 1983).

Concernant la multiplication, l'analogie de substitution est l'addition itérée (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nuñez, 2000 ; Sander, 2008), qui conduit à la croyance erronée que « multiplier rend plus grand ». Les énoncés multiplicatifs se situant dans le domaine de validité de cette analogie, tels que « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ? », comportent systématiquement un nombre entier, ayant le statut de multiplicateur. Un énoncé dont les données numériques ne comportent pas de nombre entier sort du domaine de validité et est plus fréquemment échoué. Bell, Swann et Taylor (1981) montrent ainsi que l'énoncé « Si un gallon d'essence coûte £ 1,17, combien coûte 1,22 gallon ? » n'est réussi qu'à 44 % par les collégiens anglais de 12 à 15 ans alors que s'il est proposé de chercher le prix d'une valeur entière de gallons (« Si un gallon coûte £ 1,27, combien coûtent 5 gallons ? »), le taux de réussite atteint 100 %. En effet, avec une valeur entière de gallons, le problème est concordant est la conception intuitive de la multiplication comme addition répétée (1,27 + 1,27 + 1,27 + 1,27 + 1,27). En outre, cette conception intuitive conduit à attribuer aux termes de l'énoncé les statuts distincts de multiplicateur ou de multiplicande, ce qui est de nature à affecter l'intelligibilité de la commutativité de l'opération, car un statut asymétrique est donné à ces termes. Enfin, pour la division, l'analogie de substitution est la recherche de la valeur de la part dans un contexte de partage équitable (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nuñez, 2000). Dans une activité de création d'énoncés de division (Sander, 2008), plus de 90 % d'étudiants d'université et des élèves de 6^{e} et 5^{e} proposent un scénario de partage équitable avec une question sur la taille de la part, le résultat s'exprimant dans la même unité que la quantité initiale. En outre, 78 % de ces élèves considèrent qu'il est impossible d'inventer un énoncé avec un résultat plus grand que la valeur initiale. Lorsque ce sont des étudiants qui sont soumis à cette tâche, 74 % d'entre eux échouent à produire un énoncé avec un résultat plus grand que la valeur initiale, montrant la persistance de l'influence de l'analogie de substitution bien après l'enseignement (voir par exemple Tirosh & Graeber, 1991).

Les analogies de scénario

L'analogie de scénario repose également sur des connaissances extra-mathématiques de l'individu. Elle s'appuie sur la structure sémantique, non mathématique, induite par un énoncé de problème (Bassok, Chase & Martin, 1998). Ainsi, un énoncé faisant apparaître un vase contenant des tulipes induit une structure sémantique de type contenu-contenant, de même nature que celle d'un énoncé faisant intervenir des pommes et des paniers, ou qu'un autre faisant intervenir des billes et des sachets. Ainsi, Bassok, Chase et Martin (1998) ont montré que si l'on demande à des participants d'inventer des énoncés avec des entités ayant un lien de collatéralité (par exemple, des pommes et des poires qui appartiennent à la catégorie « fruits »), ce sont très majoritairement des problèmes à structure additive qui sont proposés avec une question du type « Combien y a-t-il de fruits en tout ? ». De même, si les entités ont un lien de fonctionnalité (par exemple la relation de contenance évoquée ci-dessus comme avec des oranges et des paniers), les énoncés proposés sont essentiellement à structure multiplicative avec une question du type « Quel est le nombre d'oranges par panier ? ». Lorsque la structure mathématique du problème est concordante avec la nature des liens entre les entités (collatéralité et champ additif, fonctionnalité et champ multiplicatif), la résolution est facilitée. En revanche, en cas de discordance, comme dans « Combien y a-t-il de fois plus d'oranges que de pommes ? » (collatéralité et champ multiplicatif), la difficulté de résolution du problème s'en trouve accrue. La nature des variables en jeu dans un problème est aussi susceptible d'influencer la stratégie de résolution. Dans le cas de problèmes de distributivité, Scheibling-Sève, Pasquinelli et Sander (2020) ont montré que la stratégie de résolution mise en œuvre par des élèves de CM1-CM2 était bien dépendante du scénario évoqué par l'énoncé. Ainsi, les résultats indiquent qu'un problème portant sur des durées tel que « À la rentrée, Claire achète 2 crayons, 7 stylos et 6 feutres. Elle achète cela à chaque rentrée depuis 4 ans. Combien Claire a-t-elle acheté d'objets en tout durant ces années ? » induit une proportion équivalente de stratégies de développement (53 %) que de factorisation (47 %). En effet, il paraît envisageable tant de chercher le nombre d'objets achetés par an puis de multiplier par le nombre d'années, ce qui conduit à une factorisation (4 x (2 + 7 + 6)), que de calculer le nombre de crayons achetés en 4 ans (4 x 2), auxquels s'ajoutent le nombre de stylos achetés en 4 ans (4 x 7) et le nombre de feutres achetés en 4 ans (4 x 6), ce qui conduit à une résolution par développement : 4 x 2 + 4 x 7 + 4 x 6. En revanche, si le scénario implique des achats d'objets dont les prix sont connus tel que « À la rentrée, Claire achète des crayons à 2 € l'unité, des stylos à 7 € à l'unité et des feutres à 6 € l'unité. Elle en achète 4 de chaque sorte. Combien Claire a-t-elle dépensé en tout ? », la stratégie de développement (2 x 4 + 7 x 4 + 6 x 4) est alors presque systématiquement observée (88 % des élèves). En effet, dans ce dernier scénario, l'ajout de 2 + 7 + 6 sur lequel repose la factorisation se réfère à une quantité à laquelle il est difficile d'associer une signification dans l'énoncé. Cet effet de la variable reste présent lorsqu'il est demandé explicitement aux élèves de résoudre le problème avec deux stratégies distinctes : les élèves ont bien plus de difficulté à envisager deux stratégies dans le cas du deuxième énoncé que dans celui du premier. Les relations non mathématiques mais sémantiques entre la nature des quantités présentes dans un problème influencent donc la résolution de celui-ci.

Gros, Sander et Thibaut (2019) ont montré que l'influence de ces connaissances générales non mathématiques demeure chez les adultes et même chez des experts en mathématiques. Ils ont proposé à des adultes, non experts et experts en mathématiques, des énoncés isomorphes soit cardinaux, soit ordinaux, et impliquant une résolution fondée sur une seule soustraction avec des petites quantités comme « 14 – 2 = 12 ». Les résultats ont révélé chez les deux populations des performances inférieures pour les problèmes cardinaux que pour les problèmes ordinaux. Ces résultats montrent que des connaissances extra-mathématiques induisent des scénarios qui interfèrent dans la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux, même chez les experts censés maîtriser un raisonnement abstrait.

Ces résultats mettent en évidence que l'analogie de scénario est un facteur d'influence sur les processus de résolution et que lorsque scénario et structure mathématique concordent, on ne peut déterminer, de l'une ou de l'autre, ce qui a présidé à la réussite. *A contrario*, en l'absence de cette concordance, la réussite est un indicateur favorable d'une maîtrise conceptuelle de la notion par l'élève.

Les analogies de simulation

L'analogie de simulation repose sur la capacité de résoudre par des stratégies informelles, fondées sur des simulations mentales opérant sur des situations analogues à celles décrites dans l'énoncé, des problèmes pouvant par ailleurs être résolus par des opérations arithmétiques. Lorsqu'il est possible d'utiliser la simulation mentale pour parvenir à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice. Elle est obstructive lorsque la simulation n'est pas possible. Schliemann, Araujo, Cassunde *et al.* (1998) ont ainsi montré que des adolescents de 15 ans n'ayant pas été scolarisés et pratiquant du commerce de rue résolvent avec 75 % de réussite l'énoncé « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? ». Mais leur performance chute à 0 % pour l'énoncé « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? ». Ces deux énoncés ont le même statut facilitateur sur le plan de l'analogie de substitution (la multiplication traitée comme une addition réitérée) et sur le plan du scénario (recherche du prix d'un achat groupé) mais diffèrent grandement par leur difficulté, ce dont l'analogie de simulation permet de rendre compte. Dans le premier cas, la simulation mentale est efficiente pour aboutir à la solution (50 + 50 + 50 = 150) alors qu'elle ne l'est pas pour le second (3 + 3 + 3 + … = ?). Brissiaud et Sander (2010) ont montré que la performance pouvait ainsi varier du simple au double selon que la simulation mentale est efficiente ou non et qu'elle constitue un facteur déterminant des performances des élèves jusqu'en classe de CE2. Par exemple, au CE1, l'énoncé « Nicolas va en récréation avec 42 billes. Pendant la récréation, il perd 3 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? », simulable mentalement, est réussi à 66,5 % alors que la performance est de 27 % pour l'énoncé non simulable « Nicolas va en récréation avec 42 billes. Pendant la récréation, il perd 39 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? ». Il est à noter qu'il ne s'agit pas d'une question de taille des nombres dans la mesure où les performances sont inversées dès lors qu'il ne s'agit plus de rechercher le reste dans une situation de perte mais la valeur du gain dans une situation de recherche d'une transformation. Ainsi l'énoncé « Nicolas va en récréation avec 39 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 42. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? », simulable mentalement, est réussi à 49 % alors que la performance est de 22 % pour l'énoncé non simulable « Nicolas va en récréation avec 3 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 42. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ».

Une autre manière d'étudier ce facteur consiste à évaluer les effets d'une intervention en classe sur la réussite par des élèves à résoudre des problèmes non simulables mentalement. En effet, lorsque les valeurs numériques de l'énoncé ne permettent pas à la simulation mentale de conduire au résultat, ceux-ci doivent utiliser alors des principes arithmétiques pour résoudre correctement le problème. Dans cette perspective, Gvozdic et Sander (2020) ont montré auprès d'élèves de 6-7 ans les effets bénéfiques d'une intervention (ACE-ArithmÉcole ; voir également Villette, Fischer, Sander *et al.*, 2017) destinée à favoriser cet usage de principes arithmétiques pour résoudre des problèmes de soustractions et d'additions. Dans cette intervention, les élèves pratiquent un « recodage sémantique » de manière à ce que lorsqu'ils lisent un problème qu'ils ne peuvent pas simuler, comme par exemple « Luc a 22 billes, il en perd 18. Combien lui reste-t-il de billes ? », ils réussissent à se détacher de l'analogie de substitution de la soustraction comme une recherche de reste après une perte, pour aussi la voir comme le calcul d'un écart. Les élèves du groupe expérimental obtiennent des résultats significativement meilleurs que les élèves du cursus standard, pour les problèmes simulables comme pour les problèmes non simulables.

Synthèse pour les trois analogies du cadre A-S3

Un lien est donc bien établi entre les connaissances issues de la vie quotidienne et les notions mathématiques. Les analogies de substitution s'intéressent aux limites des champs conceptuels des notions mathématiques, ici ceux des quatre opérations arithmétiques élémentaires. Les analogies de scénario appréhendent les contextes évoqués dans les énoncés et la nature des entités en jeu alors que les analogies de simulation impliquent les valeurs des données numériques du problème, permettant ou non à la simulation mentale de mener au résultat. Ces analogies intuitives sont présentes de manière précoce chez les individus et persistent à l'âge adulte, y compris parmi des enseignants (Sander, 2008 ; Tirosh & Graeber, 1991). Les trois formes d'analogies décrites constituent donc des facteurs d'influence dans le processus de résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. Elles sont dissociables les unes des autres, et analyser un énoncé selon ces trois facteurs permet de caractériser chaque énoncé selon qu'il s'inscrit à l'intérieur ou hors du champ de validité de chaque forme d'analogie et d'identifier la nature des difficultés que cet énoncé présente pour les élèves. Ces analogies intuitives offrent un cadre pour analyser les choix réalisés dans les manuels scolaires relativement aux énoncés introduits dans la mesure où il est possible d'établir la concordance ou la discordance d'un énoncé sur le plan de chacune de ces analogies et ainsi de repérer les facilitations ou à l'inverse les difficultés introduites par chacune de ces concordances ou discordances.

Les études sur les manuels scolaires

La recherche sur les manuels scolaires a connu une croissance considérable au cours des dernières décennies. Concernant les manuels scolaires de mathématiques, Fan, Zhu et Miao (2013) proposent une classification des recherches dans ce domaine selon quatre catégories : les études portant sur le rôle des manuels scolaires, celles qui procèdent à des analyses et des comparaisons, celles portant sur leur usage et une catégorie minoritaire regroupant les autres champs, notamment celui qui cherche à établir les liens entre le manuel et la performance des élèves. Ces auteurs ont montré que le rôle important des manuels dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques est désormais largement reconnu par les chercheurs. Ils montrent également que les analyses sur les manuels scolaires de mathématiques sont conduites selon différents aspects souvent imbriqués, et parmi eux : la comparaison de différents manuels, le contenu des manuels, la cognition et la pédagogie et les questions de conceptualisation et de méthodologie. L'analyse comparatiste de la plus grande ampleur a été réalisée dans le cadre de l'étude TIMMS dans les années 1990. Lorsque les comparaisons portent sur des manuels issus de systèmes éducatifs distincts, les travaux mesurent des écarts susceptibles d'expliquer les différences de performances entre les élèves, notamment aux enquêtes internationales. Les auteurs considèrent en effet que si les manuels sont un facteur d'influence pour l'apprentissage des élèves, ils sont également le reflet de la philosophie éducative et des valeurs pédagogiques de leurs concepteurs (Zhu & Fan, 2006 ; Vicente, Sanchez & Verschaffel, 2019) et que leur analyse permet d'étudier le programme scolaire tel qu'il est mis en œuvre dans le système éducatif concerné. Dans le domaine de la résolution de problèmes, les comparaisons se basent alors sur les typologies de problèmes proposés aux élèves et la distribution des différentes catégories de problèmes dans les manuels analysés. L'étude de Zhu et Fan (2006) propose par exemple une classification de problèmes organisée en sept catégories. Elle montre notamment que les élèves états-uniens ont à résoudre, dans leurs manuels scolaires, près de deux fois plus de problèmes que les élèves chinois, avec une prédominance massive pour les deux pays des problèmes de routine (définis comme ceux dont la procédure de résolution est immédiatement évidente, relevant d'un algorithme appris), des problèmes traditionnels (définis comme familiers des élèves) et des problèmes fermés (problèmes à une seule solution), étant bien entendu que ces catégories ne sont pas exclusives les unes des autres. Les manuels américains contenaient en revanche considérablement moins de problèmes à étapes que les manuels chinois et une plus grande proportion de problèmes liés à des situations réelles. Une autre comparaison conduite par Vicente, Sanchez et Verschaffel (2019) entre les manuels de Singapour et d'Espagne, conclut à un apprentissage de haute qualité en résolution de problème avec les manuels de Singapour en raison de l'intégration d'un plus grand nombre d'étapes de raisonnement.

Concernant les études s'intéressant à l'analyse des problèmes proposés dans les manuels scolaires de mathématiques, certaines font le choix d'une approche incluant la linguistique dans l'analyse des textes, considérant les mathématiques comme un discours multimodal composé de langage, d'images et de symboles (O'Halloran & Smith, 2012). Une étude (Bassok, Chase & Martin, 1998) s'est intéressée en particulier à la structure sémantique des énoncés. Elle a montré que la quasi-totalité des énoncés de type additif présents dans les manuels scolaires impliquaient des entités avec un lien de collatéralité (par exemple des pommes et des oranges) et de même que les problèmes de division faisaient presque systématiquement intervenir des entités reliées fonctionnellement (par exemple des pommes et des paniers). Dans les manuels, la grande majorité des énoncés seraient donc concordants sur le plan de l'analogie de scénario. Il s'agit toutefois d'une analyse portant uniquement sur des manuels scolaires américains, ce qui laisse ouverte la question de la possibilité de généraliser cette conclusion.

En faisant le choix d'analyser les énoncés arithmétiques verbaux proposés dans quatre séries de manuels français de mathématiques à destination des élèves d'école primaire de 6 à 9 ans selon le cadre A-S3, la recherche qui fait l'objet du présent article s'inscrit dans la lignée de ces études. Cette approche pourrait d'ailleurs être déclinée pour d'autres manuels scolaires ou d'autres ressources pédagogiques dans différents systèmes scolaires. En outre, nous avons vu que le manuel scolaire joue un rôle important dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et qu'il est une ressource largement utilisée par les enseignants. Il paraît ainsi pertinent de s'assurer que les contenus des manuels permettent de travailler les notions arithmétiques dans la diversité de leurs dimensions.

Hypothèses

Comme rappelé ci-dessus, la présente étude a pour objectif d'analyser les caractéristiques des énoncés de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux rencontrés par les élèves au long des trois années du cycle 2 en France, soit du CP au CE2, période particulièrement focalisée sur l'apprentissage des quatre opérations arithmétiques (MEN, 2020). Cette démarche vise à établir la distribution des énoncés que les élèves sont amenés à résoudre au cours du cycle 2 selon leur concordance ou leur discordance sur le plan des trois formes d'analogies intuitives. Le corpus d'énoncés analysés a été constitué à partir des contenus de quatre collections de manuels scolaires.

Dans cette perspective, cette recherche souhaite répondre aux questions suivantes. Dans quelles proportions les huit types d'énoncés du cadre A-S3 sont-ils représentés dans les manuels français pour les quatre opérations arithmétiques ? Quelles conséquences peuvent avoir les distributions observées sur l'apprentissage des élèves en termes d'atteinte des objectifs de maîtrise conceptuelle fixés par les programmes ?

Des hypothèses peuvent être formulées relativement aux fréquences attendues concernant les différentes catégories d'énoncés sur le plan des proportions de discordance selon la forme d'analogie considérée.

Sur le plan de l'analogie de substitution, qui lie connaissances quotidiennes et notions mathématiques, nous faisons l'hypothèse que les énoncés discordants, identifiés comme d'une difficulté supérieure, resteront minoritaires pour chacun des niveaux (CP, CE1 et CE2) scolaires (hypothèse 1a) mais que leur fréquence augmentera au long du cycle, dans une logique de progressivité des apprentissages et d'accroissement des compétences des élèves (hypothèse 1b).

Étant donné les études sur les liens de collatéralité dans les énoncés de problème (Bassok, Chase & Martin, 1998 ; Sander, 2008), nous faisons donc l'hypothèse que la discordance sur le plan de l'analogie de scénario sera observée de manière fortement minoritaire (hypothèse 2a) et stable sur l'ensemble du cycle (hypothèse 2b).

La taille des nombres étant en jeu dans l'analogie de simulation, nous faisons l'hypothèse que les énoncés discordants pour cette analogie sont minoritaires lorsqu'ils sont proposés au début de l'apprentissage de l'opération arithmétique (hypothèse 3a), c'est-à-dire au CP, pour l'ensemble des opérations. Nous faisons également l'hypothèse que, étant donné l'accroissement des quantités numériques en jeu avec les niveaux scolaires, lié au champ numérique régi par les programmes, la discordance augmente au long des trois années du cycle 2 pour cette forme d'analogie (hypothèse 3b).

Nous proposons de compléter ces analyses générales en analysant, pour chacun des niveaux scolaires, la distribution d'énoncés concordants et discordants selon le manuel scolaire et l'opération arithmétique.

Méthode

Choix des manuels scolaires et base de données

Les auteurs considéraient que le meilleur critère de choix pour les manuels aurait été le volume des ventes mais ces chiffres ne sont pas rendus publics par les éditeurs et il n'existe pas de données statistiques quant à l'utilisation de ces ressources dans les classes. À défaut, trois manuels ont été retenus sur des critères d'observations d'usages sur le terrain convergents, de la part de conseillers pédagogiques en charge de l'accompagnement des enseignants dans leur classe : *Cap Maths* (Hatier), *Vivre les maths* (Nathan) et *Méthode Heuristique Mathématiques*, ou «*MHM*» (site web et Nathan). En outre, la *Méthode de Singapour* (Librairie des Écoles), composée de trois manuels, a été intégrée à cette étude en raison de sa mise en exergue dans le rapport «21 mesures pour l'enseignement des mathématiques» (Villani, Torossian & Dias, 2018). Les contenus collectés dans ces quatre manuels sont issus des fichiers de l'élève pour chacun des niveaux du cycle 2. *MHM* propose aussi une banque d'énoncés sous la forme d'une «Boîte à énigmes»; les problèmes arithmétiques à énoncés verbaux qu'elle contient ont été intégrés au corpus.

Une base de données a ensuite été constituée à partir des contenus des 12 manuels correspondant aux 4 méthodes déclinées pour les 3 niveaux de classe du cycle 2 (CP, CE1, CE2).

Critères d'identification des énoncés

Pour constituer la base de données, il s'est agi d'identifier les activités relevant du domaine de la résolution de

Tableau 2. Exemples d'énoncés codés selon le cadre A-S3

Énoncé		Concordance ou Discordance selon la forme d'analogie			Niveau scolaire	Manuel scolaire	Numéro et page
		Substitution	Scénario	Simulation			
1	Lucas donne 13 fleurs à sa mère. Sa maman en jette 2 qui sont fanées. Combien peut-elle en mettre dans le vase ?	Concordant	Concordant	Concordant	CP	MHM	n° 8
2	Ziad a 16 bonbons. Il en distribue 10 à ses camarades. Combien a-t-il de bonbons maintenant ?	Concordant	Concordant	Discordant	CE1	Vivre les maths	n° 2 p. 40
3	Zoé a dépensé 165 €. Élodie a dépensé 28 € de moins qu'elle. Combien Élodie a-t-elle dépensé ?	Discordant	Concordant	Discordant	CE2	Méthode de Singapour	n° 1 p. 29
4	Lisa accepte d'échanger ses perles contre des pépites que possède Alex. Ils sont tombés d'accord sur l'échange : 5 perles contre 1 pépite. Alex donne 4 pépites à Lisa. Combien Lisa doit-elle lui donner de perles ?	Concordant	Discordant	Concordant	CE1	Cap Maths	n° 2 p. 83

problèmes. Outre ceux explicitement répertoriés ainsi par les auteurs ont été intégrés les différents exercices à énoncés ainsi que ceux dont le scénario est illustré et pour lesquels seule la question est formulée verbalement. Dans ce dernier cas, l'énoncé a été intégré à la base de données sous la forme d'un descriptif de l'illustration, rédigé par la première auteure. Ces énoncés représentant moins de 3 % du corpus, l'inévitable subjectivité de la retranscription est peu susceptible d'influer sur la significativité des écarts observés. Par ailleurs, une condition pour qu'une activité soit considérée comme problème était que la résolution implique la mobilisation d'une ou de plusieurs des quatre opérations algébriques. Dans le cas où une activité présentait plusieurs questions, il a été considéré qu'il s'agissait pour l'élève de résoudre autant de problèmes.

Modalités de codage des énoncés et accord inter-juges

Les énoncés ont été intégrés dans un tableur dans lequel chaque ligne présente l'énoncé, ses caractéristiques et son analyse selon le cadre A-S3. Pour ce qui est des caractéristiques, ont été recueillis les éléments de référence suivants : nom de la collection, niveau de classe, titre de la séance, numéro de l'exercice et numéro de page. Dans le cas où plusieurs problèmes étaient donnés à résoudre sous un même numéro d'exercice, une sous-numérotation a été ajoutée entre parenthèses (par exemple 3(2)). Dans le même temps, les codages « c » pour « concordant » et « d » pour « discordant » ont été utilisés pour caractériser chaque énoncé selon qu'il se trouve dans ou hors du domaine de validité des analogies de substitution, de scénario et de simulation. La concaténation de ces trois paramètres fait ainsi apparaître huit catégories de problèmes (2^3), de triplement concordant (ccc) à triplement discordant (ddd). Le tableau 2 présente 4 énoncés issus du corpus et leurs caractéristiques.

Ce tableau présente quatre exemples d'énoncés issus du corpus analysé. Le premier énoncé propose une situation de retrait et de recherche de reste, il est donc concordant avec la conception intuitive de la soustraction. Son scénario est familier puisqu'il s'agit de retirer une quantité de fleurs à une collection initiale et l'accès au résultat est simulable mentalement, l'élève pouvant effectuer le retrait unité par unité. L'énoncé 2 ne diffère de l'énoncé 1 que par son caractère non simulable : retirer 10 bonbons à un tout de 16 bonbons n'est pas accessible mentalement, l'élève devra mobiliser des faits arithmétiques (calcul ou résultat mémorisé) pour accéder au résultat. L'énoncé 3 présente une situation de comparaison qui ne consiste donc pas en une recherche de reste dans une situation de retrait ; il

Tableau 3. Nombre d'énoncés selon le niveau scolaire et le manuel

	Manuel				
	Cap Maths	Méthode Heuristique des Maths	Vivre les maths	Méthode de Singapour	Total
CP	140	148	271	89	648
CE1	261	107	475	205	1 048
CE2	538	111	636	153	1 438
Total	939	366	1 382	447	3 134

Tableau 4. Taux de discordance par rapport aux seuils théoriques selon le type d'analogie et le niveau de classe

Type d'analogie	CP	CE1	CE2	Total
Substitution[a]	37,0 $\chi^2(1, N=648)=43{,}56^{**}$	47,5 $\chi^2(1, N=1\ 047)=2{,}68$ NS	51,4 $\chi^2(1, N=1\ 439)=1{,}06$ NS	47,1 $\chi^2(1, N=3\ 134)=10{,}57^{**}$
Scénario[b]	10,5 $\chi^2(1, N=648)=152{,}07^{**}$	16,9 $\chi^2(1, N=1\ 047)=127{,}11^{**}$	29,7 $\chi^2\ (1, N=1\ 439)=8{,}66^{*}$	21,4 $\chi^2(1, N=3\ 134)=199{,}31^{**}$
Simulation[a]	33,2 $\chi^2(1, N=648)=73{,}34^{**}$	59,5 $\chi^2(1, N=1\ 047)=37{,}82^{**}$	74,3 $\chi^2(1, N=1\ 439)=339{,}54^{**}$	60,8 $\chi^2(1, N=3\ 134)=147{,}54^{**}$

Notes : a : taux comparés au seuil théorique majoritaire de 50 % ; b : taux comparés au seuil théorique fortement minoritaire de 30 % ; * : $p<0{,}05$ et ** : $p<0{,}01$.

est ainsi discordant pour l'analogie de substitution. Ses variables numériques excluent la simulation mentale et contraignent l'élève à opérer à un calcul, ce qui lui confère la caractéristique d'être discordant pour la simulation. En revanche, le scénario est concordant, car il s'agit d'une situation usuelle de comparaison de deux dépenses d'achat. Enfin, l'énoncé 4, multiplicatif, est concordant pour la substitution (situation d'addition itérée), discordant pour le scénario (perles et pépites n'entretiennent pas de rapport fonctionnel) et concordant pour la simulation (ajout itéré de quatre fois la valeur 5).

Le codage des énoncés a été effectué par la première auteure. Pour évaluer la fiabilité de ce codage, 30 % du corpus (soit 942 énoncés choisis aléatoirement) ont été recodés par une experte (deuxième auteure). La mesure de l'accord a été faite avec le Kappa de Cohen (deux juges et un codage qualitatif en catégories). L'accord inter-juges est fort pour l'analogie de simulation (0,79) et presque parfait pour les analogies de substitution (0,92) et de scénario (0,88). La combinaison des trois codages pour chaque énoncé montre un accord inter-juges fort (0,8).

Les analyses statistiques ont été conduites en utilisant SPSS 25.0 (IBM SPSS Statistics, IBM Corporation). Pour évaluer la significativité des écarts, le test d'indépendance du Khi-deux avec un seuil de 0,01 et une mesure de force d'association significative avec le *V de Cramer* (plus de deux modalités) ont été utilisés.

Résultats

Les résultats portent sur le corpus de 3 134 énoncés. Le tableau 3 présente le nombre d'énoncés par niveau scolaire et par manuel.

Les résultats montrent que le nombre d'énoncés est très différent selon le niveau. Les activités de résolution de problèmes sont donc plus fréquemment proposées aux élèves en fin de cycle. Toutefois, cet effet est surtout dû à deux des quatre manuels, car *MHM* et *Méthode de Singapour* ne suivent pas ce profil général. En outre, les collections de manuels scolaires diffèrent par le nombre d'énoncés qu'ils proposent. *Vivre les maths* et *Cap Maths* intègrent considérablement plus d'énoncés que *MHM* ou la *Méthode de Singapour*, la méthode *Vivre les Maths* concentrant à elle seule 44,1 %

Tableau 5. Taux de discordance selon le type d'analogie, le niveau de classe et le manuel scolaire

Type d'analogie	Niv.	Cap Maths	MHM	Méthode de Singapour	Vivre les Maths
Substitution[a]	CP	37,1 $\chi^2(1, N = 140) = 9{,}26^*$	20,9 $\chi^2(1, N = 148) = 49{,}97^{**}$	37,1 $\chi^2(1, N = 89) = 5{,}94^*$	45,7 $\chi^2(1, N = 271) = 1{,}95$ NS
	CE1	40,6 $\chi^2(1, N = 261) = 9{,}20^{**}$	34,9 $\chi^2(1, N = 106) = 9{,}66^{**}$	48,8 $\chi^2(1, N = 205) = 0{,}12$ NS	53,5 $\chi^2(1, N = 475) = 2{,}29$ NS
	CE2	55,9 $\chi^2(1, N = 538) = 7{,}61^{**}$	49,1 $\chi^2(1, N = 112) = 0{,}36$ NS	52,3 $\chi^2(1, N = 153) = 0{,}32$ NS	47,6 $\chi^2(1, N = 636) = 1{,}42$ NS
Scénario[b]	CP	14,3 $\chi^2(1, N = 140) = 22{,}85^{**}$	10,8 $\chi^2(1, N = 148) = 33{,}77^{**}$	7,9 $\chi^2(1, N = 89) = 25{,}97^{**}$	9,2 $\chi^2(1, N = 271) = 70{,}86^{**}$
	CE1	14,6 $\chi^2(1, N = 261) = 41{,}38^{**}$	19,8 $\chi^2(1, N = 106) = 8{,}72^{**}$	5,4 $\chi^2(1, N = 205) = 72{,}14^{**}$	22,5 $\chi^2(1, N = 475) = 24{,}95^{**}$
	CE2	30,1 $\chi^2(1, N = 538) = 2{,}51$ NS	22,3 $\chi^2(1, N = 112) = 6{,}11^*$	26,1 $\chi^2(1, N = 153) = 3{,}56$ NS	31,4 $\chi^2(1, N = 636) = 1{,}01$ NS
Simulation[a]	CP	35,0 $\chi^2(1, N = 140) = 12{,}60^{**}$ $p < 0{,}01^{**}$	35,1 $\chi^2(1, N = 148) = 13{,}08^{**}$ $p < 0{,}01^{**}$	40,4 $\chi^2(1, N = 89) = 3{,}25$ NS $p = 0{,}07$ NS	28,8 $\chi^2(1, N = 271) = 48{,}80^{**}$ $p < 0{,}01^{**}$
	CE1	57,4 $\chi^2(1, N = 261) = 5{,}83^*$	53,8 $\chi^2(1, N = 106) = 0{,}60$ NS	57,1 $\chi^2(1, N = 205) = 4{,}10^*$	62,9 $\chi^2(1, N = 475) = 31{,}85^{**}$
	CE2	73,2 $\chi^2(1, N = 538) = 116{,}17^{**}$	82,1 $\chi^2(1, N = 112) = 46{,}29^{**}$	79,1 $\chi^2(1, N = 153) = 51{,}77^{**}$	72,6 $\chi^2(1, N = 636) = 130{,}42^{**}$

Notes : a : taux comparés au seuil théorique majoritaire de 50 % ; b : taux comparés au seuil théorique fortement minoritaire de 30 % ; * : $p < 0{,}05$ et ** : $p < 0{,}01$.

des énoncés du corpus, sans pour autant être la méthode la plus volumineuse en termes de pages.

Le tableau 4 montre les taux de discordance selon chaque type d'analogie et le niveau scolaire.

Pour l'analogie de substitution, le taux moyen de discordance est significativement inférieur au seuil théorique[1] majoritaire mais la répartition varie fortement d'un niveau scolaire à un autre : au CP, le taux de discordance est significativement minoritaire (χ^2 (1, N = 366) = 43,56, $p < 0{,}001$), alors qu'au CE1 et au CE2, les écarts entre taux de concordance et de discordance cessent d'être significatifs. Par ailleurs, le taux de discordance augmente significativement entre le CP et le CE2 (χ^2 (1, N = 2 087) = 36,78, $p < 0{,}01$). Ces résultats, à savoir un taux de discordance minoritaire et une croissance du taux au long du cycle, soutiennent partiellement l'hypothèse 1a et pleinement l'hypothèse 1b.

Pour l'analogie de scénario, les résultats montrent que les énoncés sont significativement très minoritairement discordants pour chacun des trois niveaux de classe. Par ailleurs, le taux de discordance augmente entre le CP et le CE2 (χ^2 (1, N = 2 087) = 90,84, $p < 0{,}01$). Ces résultats, à savoir un taux de discordance global significativement inférieur au seuil très minoritaire pour les trois niveaux, sont en faveur de l'hypothèse 2a. En revanche, l'accroissement observé au long du cycle n'est pas conforme à l'hypothèse 2b. Ce résultat sera discuté plus loin.

Pour l'analogie de simulation, les résultats montrent que le taux moyen de discordance est significativement supérieur au seuil théorique majoritaire. Le taux de discordance est significativement minoritaire au CP et significativement majoritaire à partir du CE1. Il augmente significativement entre le CP et le CE2 (χ^2 (1, N = 2 087) = 318,97, $p < 0{,}01$). Ces résultats soutiennent l'hypothèse 3a qui prévoyait un taux minoritaire de discordance en début de cycle. L'accroissement au cours du cycle du taux de discordance soutient l'hypothèse 3b.

Afin d'identifier d'éventuelles spécificités selon le manuel scolaire, les analyses précédentes ont ensuite été menées pour chacun des manuels concernés, dans une perspective comparative. Le tableau 5 indique les

1 Le seuil théorique entre « majoritaire » et « minoritaire » est établi à 50 % et le seuil théorique « très minoritaire » à 33,33 %.

Tableau 6. Taux de discordance selon le type d'analogie, le niveau de classe et l'opération arithmétique

Type d'analogie	Niv.	Addition	Soustraction	Multiplication	Division
Substitution[a]	CP	10,1 $\chi^2(1, N=208)=132{,}48$**	62,2 $\chi^2(1, N=259)=15{,}32$**	1,7 $\chi^2(1, N=58)=54{,}07$**	55,4 $\chi^2(1, N=74)=0{,}86$ NS
	CE1	23,5 $\chi^2(1, N=230)=64{,}71$**	78,3 $\chi^2(1, N=360)=115{,}60$**	2,4 $\chi^2(1, N=166)=150{,}39$**	64,1 $\chi^2(1, N=192)=15{,}19$**
	CE2	15,3 $\chi^2(1, N=229)=110{,}40$**	85,2 $\chi^2(1, N=440)=218{,}41$**	3,5 $\chi^2(1, N=228)=197{,}12$**	73,7 $\chi^2(1, N=300)=67{,}21$**
Scénario[b]	CP	6,7 $\chi^2(1, N=208)=66{,}23$**	14,7 $\chi^2(1, N=259)=40{,}58$**	6,9 $\chi^2(1, N=58)=18{,}24$**	6,8 $\chi^2(1, N=74)=23{,}52$**
	CE1	12,6 $\chi^2(1, N=230)=44{,}44$**	21,9 $\chi^2(1, N=360)=21{,}00$**	9,0 $\chi^2(1, N=166)=44{,}09$**	16,1 $\chi^2(1, N=192)=25{,}51$**
	CE2	32,3 $\chi^2(1, N=229)=0{,}11$ NS	36,8 $\chi^2(1, N=440)=2{,}41$ NS	13,6 $\chi^2(1, N=228)=39{,}96$**	37,7 $\chi^2(1, N=300)=3{,}00$ NS
Simulation[a]	CP	31,7 $\chi^2(1, N=208)=27{,}77$**	38,6 $\chi^2(1, N=259)=13{,}44$**	13,8 $\chi^2(1, N=58)=30{,}41$**	14,9 $\chi^2(1, N=74)=36{,}54$**
	CE1	67,8 $\chi^2(1, N=230)=29{,}23$**	73,6 $\chi^2(1, N=360)=80{,}28$**	32,5 $\chi^2(1, N=166)=20{,}26$**	41,7 $\chi^2(1, N=192)=5{,}33$**
	CE2	82,1 $\chi^2(1, N=229)=94{,}36$**	87,7 $\chi^2(1, N=440)=250{,}51$**	53,9 $\chi^2(1, N=228)=1{,}42$ NS	55,0 $\chi^2(1, N=300)=3{,}00$ NS

Notes : a : taux comparés au seuil théorique majoritaire de 50 % ; b : taux comparés au seuil théorique fortement minoritaire de 30 % ; * : $p<0{,}05$ et ** : $p<0{,}01$.

taux de discordance selon le manuel scolaire, le niveau scolaire et le type d'analogie.

Pour l'analogie de substitution, les taux de discordance sont significativement minoritaires pour trois manuels au CP (*Cap Maths*, *MHM* et *Méthode de Singapour*) et pour deux manuels au CE1 (*Cap Maths* et *MHM*). Au CE2, le taux de discordance est significativement majoritaire uniquement pour le manuel *Cap Maths*. Le taux est non significativement majoritaire pour le manuel *Vivre les Maths* sur les trois niveaux.

Pour l'analogie de scénario, les taux de discordance sont significativement très minoritaires pour les quatre manuels au CP et au CE1. Au CE2, ce taux est significativement très minoritaire seulement pour *MHM*. Concernant ce niveau, les énoncés restent cependant significativement minoritaires pour *Cap Maths* (χ^2 (1, N = 538) = 85,12, $p<0{,}001$), *Méthode de Singapour* (χ^2 (1, N = 153) = 34,83, $p<0{,}001$) et *Vivre les Maths* (χ^2 (1, N = 636) = 87,57, $p<0{,}001$).

Pour l'analogie de simulation, les énoncés discordants sont significativement minoritaires pour trois manuels au CP (*Cap Maths*, *MHM* et *Vivre les Maths*). Les énoncés discordants sont significativement majoritaires pour trois manuels (*Cap Maths*, *Méthode de Singapour* et *Vivre les Maths*) au CE1 et pour les quatre manuels au CE2.

La question se pose également d'un traitement distinct des énoncés selon les opérations arithmétiques concernées. Le tableau 6 présente des taux de discordance selon le type d'analogie, le niveau de classe et l'opération arithmétique.

Pour l'analogie de substitution, les énoncés se résolvant par une addition et une multiplication sont minoritairement discordants tout au long du cycle tandis que les énoncés se résolvant par une soustraction ou une division (excepté pour le CP) sont majoritairement discordants tout au long du cycle.

Pour l'analogie de scénario, les énoncés sont très minoritairement discordants pour l'ensemble des quatre opérations au CP et au CE1, et pour la multiplication seulement au CE2. Concernant ce niveau scolaire, les énoncés restent cependant significativement minoritaires pour l'addition (χ^2 (1, N = 229) = 28,65, $p<0{,}001$), la soustraction (χ^2 (1, N = 440) = 30,58, $p<0{,}001$) et la division (χ^2 (1, N = 300) = 18,25, $p<0{,}001$).

Pour l'analogie de simulation, les énoncés sont minoritairement discordants pour les quatre opérations au CP (de 13,8 % ; $\chi^2_{\text{d'ajustement}}=30{,}41$; df = 1 ; $p<0{,}01$ à

38,6 %; $\chi^2_{\text{d'ajustement}} = 13{,}44$; df = 1; $p < 0{,}01$). À partir du CE1, les énoncés additifs et soustractifs sont majoritairement discordants mais sont minoritairement discordants pour la multiplication (32,5 %; $\chi^2_{\text{d'ajustement}} = 20{,}26$; df = 1; $p < 0{,}01$) et la division (41,7 %; $\chi^2_{\text{d'ajustement}} = 5{,}33$; df = 1; $p < 0{,}01$). Au CE2, pour ces deux opérations, les taux de discordance atteignent le seuil de majorité mais sont non significativement supérieurs (multiplication : 53,9 %; $\chi^2_{\text{d'ajustement}} = 1{,}42$; df = 1; $p = 0{,}23$ et division : 55 %; $\chi^2_{\text{d'ajustement}} = 3$; df = 1; $p = 0{,}08$).

Discussion générale

La résolution de problèmes occupe une place majeure dans l'apprentissage des mathématiques. Cette place est soulignée dans les derniers programmes de l'Éducation nationale (MEN, 2020), en particulier l'importance de la modélisation, qui soutient la possibilité d'identifier la structure abstraite d'un énoncé indépendamment de ses traits superficiels. En cas de discordance, les traits superficiels cessent d'être des indices qui aident à la résolution. En d'autres termes, plus l'énoncé présente de discordances plus l'atteinte de la solution est difficile. En effet, les taux de réussite diffèrent sensiblement selon la discordance avec l'analogie de substitution (Riley, Greeno & Heller, 1983), de scénario (Gros, Thibault & Sander, 2020; Scheibling-Sève, Pasquinelli & Sander, 2020) et de simulation (Brissiaud & Sander, 2010; Schliemann, Araujo, Cassunde *et al.*, 1998). La question se pose alors de savoir si les élèves sont régulièrement confrontés à des problèmes discordants ou si, au contraire, ils sont principalement exposés à des problèmes concordants. Cette étude avait ainsi pour objectif d'analyser la distribution des énoncés verbaux que les élèves sont amenés à résoudre au cours du cycle 2 selon leur concordance ou leur discordance sur le plan des trois formes d'analogies intuitives.

Nos hypothèses portaient sur les proportions de discordance selon la forme d'analogie considérée. Sur le plan de l'analogie de substitution, qui lie connaissances quotidiennes et notions mathématiques, la moindre fréquence des énoncés discordants, observée telle que prédite, est à discuter sur le plan de ses conséquences pour l'apprentissage des élèves et leur maîtrise des notions arithmétiques prévues par les programmes. Travailler ces notions en s'appuyant majoritairement sur un corpus d'énoncés concordants pour la substitution ou n'intégrant pas l'ensemble des types de discordances (par exemple peu d'énoncés soustractifs de comparaison avec l'expression « de plus ») est susceptible de favoriser l'ancrage des conceptions intuitives des élèves, alors même que sont reconnues la prédominance et la persistance de ces conceptions, y compris au-delà de la scolarité. Durant la première année d'école élémentaire, les élèves entrent ainsi dans l'apprentissage des notions en ayant à résoudre très majoritairement des énoncés conformes à leurs conceptions intuitives, sans rencontrer d'obstacles conceptuels. Sur le plan de l'analogie de scénario, nos résultats montrent une sous-représentation massive des énoncés discordants tout au long des trois premières années d'école élémentaire. Les élèves abordent ainsi dans la plupart des cas les concepts arithmétiques à partir de situations dans lesquelles l'atteinte de la solution est guidée par les relations sémantiques liant les éléments de l'énoncé. Ainsi, dans les manuels analysés, les entités reliées collatéralement (par exemple pommes et oranges) concernent dans leur grande majorité des énoncés du champ additif et les entités reliées fonctionnellement (par exemple pommes et paniers) concernent essentiellement des énoncés du champ multiplicatif. Cela questionne l'opportunité qui est donnée aux élèves habitués à travailler sur ces types d'énoncés d'être en mesure de faire face à des situations où les relations sémantiques ne concordent pas avec la structure mathématique de l'énoncé (par exemple la recherche d'un rapport entre des quantités de pommes et d'oranges). Sur le plan de l'analogie de simulation, les résultats de cette étude montrent que les énoncés pour lesquels la simulation mentale conduit à la solution (concordants), soit ceux pour lesquels la solution peut être atteinte sans avoir nécessairement mobilisé les faits et principes arithmétiques supposément travaillés par le problème, sont particulièrement fréquents en première année d'école élémentaire et que leur proportion diminue ensuite nettement lors des deux années suivantes. Le concept d'addition, par exemple, est d'abord abordé à partir de situations permettant à l'élève d'aboutir à la solution par une stratégie informelle, sans forcément identifier l'opération nécessaire.

À notre connaissance, seules Bassok, Chase et Martin (1998) ont examiné les manuels en analysant la collatéralité des quantités présentées, qui est un des critères de l'analogie de scénario. Dans notre étude, nous avons d'une part confirmé la faible représentation d'énoncés discordants sur le plan de l'analogie de scénario, et nous avons systématisé ces analyses en les étendant également aux analogies de substitution et de simulation. Nous avons observé de plus des différences selon les opérations arithmétiques impliquées dans les énoncés. Les résultats montrent pour l'analogie de substitution une grande hétérogénéité des taux de discordance selon l'opération considérée, quel que soit le niveau scolaire, avec un très faible taux de discordance pour l'addition et la multiplication alors qu'il s'avère majoritaire pour la soustraction et la division pour chaque niveau. Une piste d'explication peut se trouver dans les instructions officielles pour le cycle 2 concernant les attendus de fin d'année (MEN, 2018). Pour la multiplication, il est en effet explicitement précisé pour le CP d'en construire le sens dans des contextes d'addition réitérée, c'est-à-dire de l'inscrire dans le domaine de validité de sa conception intuitive. Parmi les exemples d'énoncés proposés aux enseignants comme illustration, tous sont concordants pour l'analogie de substitution. *A contrario*, lorsqu'il est question de la division, les contextes de partage et de groupement sont conjointement et explicitement signalés dans ces mêmes documents. Les résultats montrent pour l'analogie de simulation une grande hétérogénéité des taux de discordance selon la progressivité de l'apprentissage des opérations, indiquant un faible taux de discordance au moment de l'introduction des différentes opérations arithmétiques. Enfin, notons que la multiplication est la seule opération pour laquelle les énoncés sont majoritairement concordants sur le plan des trois analogies et tout au long du cycle. La rareté de certaines discordances observées dans les manuels indique la plus faible opportunité donnée aux enseignants de mener des activités de classe s'appuyant sur ce type d'énoncés. Cela ouvre la perspective d'études qui, sur le plan des hypothèses d'apprentissage, explorent la complémentarité de l'introduction de problèmes concordants et discordants.

L'ensemble des résultats est également à pondérer selon les manuels considérés. Leur comparaison révèle pour l'analogie de substitution une hétérogénéité qui décroît au cours du cycle, qui contraste, pour les analogies de scénario et de simulation, avec une relative homogénéité pour les trois niveaux scolaires.

Au vu des résultats de cette étude, il paraîtrait pertinent de questionner les choix ayant présidé à l'élaboration des progressions pédagogiques de ces ressources mais aussi des repères de progressivité présentés dans les instructions officielles. Toujours sur le plan des perspectives, le cadre des analogies A-S3 pourrait contribuer à l'élaboration de progressions d'apprentissage contrôlant davantage l'exposition des élèves aux énoncés concordants et discordants. Cette étude a en effet montré que les élèves sont susceptibles d'être exposés à des fréquences très variables aux différents types d'énoncés, bien qu'une étude sur les usages effectifs de ces manuels serait nécessaire pour s'en assurer. Ils ont notamment très peu à résoudre d'énoncés discordants sur le plan de l'analogie de scénario. Et concernant la multiplication, les élèves ne sont que rarement confrontés à des énoncés discordants. En outre, les élèves de CP sont aussi minoritairement exposés à des problèmes d'addition discordants. L'introduction plus systématique de discordance constitue une piste pour exercer les élèves à résoudre des énoncés hors des domaines de validité de leurs conceptions intuitives. En d'autres termes, il s'agirait d'accroître les occasions d'avoir à surmonter des inférences spontanées obstructives et de travailler les notions arithmétiques dans toutes leurs dimensions. Pour examiner cette hypothèse, il est nécessaire d'évaluer les effets d'une progression pédagogique intégrant une fréquence contrôlée d'énoncés de problèmes discordants sur le plan des analogies intuitives de substitution, scénario et simulation sur les performances des élèves. Parce qu'une simple exposition à cette nouvelle progression ne sera pas suffisante, elle devra être associée à une mise en œuvre de séances pédagogiques visant à favoriser le développement conceptuel des élèves, notamment par un soutien à la compréhension et un guidage dédié à l'évolution du modèle mental initialement élaboré, comme le propose le modèle SECO (Gros, Thibaut & Sander, 2020).

Cette approche offre également la possibilité d'enrichir des comparaisons internationales. En effet, pour comprendre les écarts de réussite aux épreuves internationales, il peut être intéressant de comparer le matériel pédagogique rencontré par les élèves. Jusqu'à présent ces comparaisons portent principalement sur la présence de problèmes à étapes ou sur les différentes étapes explicitées de la résolution de problème (Vicente, Sanchez & Verschaffel, 2019 ; Zhu & Fan, 2006). Ainsi, il pourrait être fécond de comparer les répartitions d'énoncés discordants selon les pays. En effet, être confronté à des problèmes discordants est une manière de favoriser le besoin pour l'élève de se détacher des conceptions intuitives et de construire le sens des opérations, et pourrait être favorable aux apprentissages.

En outre, ce cadre apporte des perspectives quant à l'évaluation des performances des élèves. En effet, comme nous l'avons vu, afin d'évaluer, par exemple, la conceptualisation de la soustraction, la seule réussite à un problème dont l'énoncé est concordant sur le plan de l'analogie de substitution est peu informative. En revanche, confronter les élèves à la résolution d'énoncés discordants l'est. Toutefois cette pratique est encore peu développée. Ainsi, dans les évaluations nationales de CE1 du MEN (Conseil scientifique de l'Éducation nationale, 2020), sur les six problèmes de résolution de problèmes proposés, deux seulement sont discordants sur le plan de la substitution et aucun problème ne l'est sur le plan du scénario. En revanche, quatre problèmes sont discordants sur le plan de la simulation. Afin d'outiller plus finement les enseignants pour évaluer les acquis et difficultés de leurs élèves, contrôler systématiquement la discordance dans les énoncés permettrait de repérer si les difficultés des élèves proviennent de la maîtrise du concept arithmétique, de la nature des éléments de l'énoncé ou de la capacité à utiliser les principes arithmétiques.

Catherine Rivier
Université de Genève, Laboratoire IDEA, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation
catherine.rivier@unige.ch

Calliste Scheibling-Sève
Université de Genève, Laboratoire IDEA, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation
calliste.scheibling.seve@gmail.com

Emmanuel Sander
Université de Genève, Laboratoire IDEA, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation
Emmanuel.Sander@unige.ch

Bibliographie

BASSOK M., CHASE V. & MARTIN S. (1998). « Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge ». *Cognitive Psychology*, n° 35, p. 99-134.

BASSOK M., WU L. & OLSETH K. (1995). « Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem-solving transfer ». *Memory & Cognition*, n° 23, p. 354-67.

BELL A., SWANN M. & TAYLOR G. (1981). « Choice of operation in verbal problems with decimal numbers ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 12, p. 399-420.

BRISSIAUD R. & SANDER E. (2010). « Arithmetic word problem solving: A situation strategy first framework ». *Developmental Science*, n° 13, p. 92-101.

COQUIN-VIENNOT D. & MOREAU S. (2003). « Highlighting the role of the episodic situation model in the solving arithmetical problems ». *European Journal of Psychology of Education*, n° 3, p. 267-279.

CONSEIL SCIENTIFIQUE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2020). *Évaluer pour mieux aider. ÉvalAide, un dispositif scientifique de prévention des difficultés en lecture et en mathématiques au CP et au CE1*. En ligne : <https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Evaluations_2019-2020/00/4/EvalAide_CSEN_Definitif_Mai2019_1165004.pdf> (consulté le 22 décembre 2022).

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L. & DE WIN L. (1985). « Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions ». *Journal of Educational Psychology*, n° 77, p. 460-470.

FAN L., ZHU Y. & MIAO Z. (2013). « Textbook research in mathematics education: Development status and directions ». *ZDM Mathematics Education*, n° 45, p. 633-646.

FISCHBEIN E (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Tel-Aviv : Kluwer Academic Publishers.

FISCHBEIN E. (1989). « Tacit models and mathematical reasoning ». *For the Learning of Mathematics*, n° 9, p. 9-14.

FISCHBEIN E. (1994). « Tacit models ». In D. Tirosh (dir.), *Implicit and Explicit Knowledge: An Educational Approach*. Norwood : Ablex, p. 97-109.

FISCHBEIN E., DERI M., NELLO M. & MARINO M. (1985). « The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division ». *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 16, p. 3-17.

GAMO S., TAABANE L. & SANDER E. (2011). « Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes ». *L'Année psychologique*, n° 111, p. 613-640.

GREER B. (1992). « Multiplication and division as models of situations ». In D. A. Grouws (dir.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York : Macmillan, p. 276-295.

GROS H., SANDER E. & THIBAUT J.-P. (2019). « When masters of abstraction run into a concrete wall: Experts falling arithmetic word problems ». *Psychonomic Bulletin & Review*, n° 26, p. 1738-1746.

GROS H., THIBAUT J.-P. & SANDER E. (2020). « Semantic congruence in arithmetic: A new conceptual model for word problem solving ». *Educational Psychologist*, n° 55, p. 69-87.

GVOZDIC K. & SANDER E. (2020). « Learning to be an opportunistic word problem solver: Going beyond informal solving strategies ». *ZDM Mathematics Education*, n° 52, p. 111-123.

HOLYOAK K.J. & THAGARD P. (1995). *Mental Leaps: Analogy in Creative Thought*. Cambridge : MIT Press.

HUDSON T. (1983). « Correspondences and numerical differences between disjoint sets ». *Child Development*, n° 54, p. 84-90.

JOHNSON-LAIRD P. N. (1983). *Mental models: Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Cambridge (États-Unis) : Harvard University Press / Cambridge (Royaume-Uni) : Cambridge University Press.

KINTSCH W. & GREENO J.G. (1985). « Understanding and solving word arithmetic problems ». *Psychological Review*, n° 92, p. 109-129.

LAKOFF G. & NUÑEZ R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York : Basic Books.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2018). *Mathématiques : repères annuels de progression pour le cycle 2*. En ligne : <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Hebdo22/MENE1913283N.htm> (consulté le 22 décembre 2022.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2020). « Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2) ». *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 30 juillet, n° 31.

NESHER P., GREENO J. & HELLER J. (1981). « The development of semantic categories for addition and substraction ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 13(4), p. 373-394.

O'HALLORAN K. & SMITH B. A. (2012). « Multimodal studies ». In K. O'Halloran & B. A. Smith (dir.). *Multimodal Studies. Exploring Issues and Domains*. New York : Routledge, p. 1-16.

REUSSER K. (1990). *Understanding Word Arithmetic Problems. Linguistic and Situational Factors*. En ligne : <https://eric.ed.gov/?id=ED326391>.

RILEY M., GREENO J. & HELLER J. (1983). « Development of children's problem solving ability in arithmetic ». In H. Ginsberg (dir.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York : Academic Press, p. 153-196.

SANDER E. (2008). « Les connaissances naïves en mathématiques ». In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (dir.), *Les connaissances naïves*. Paris : Armand Colin, p. 57-102.

SANDER E. (2017). « Les connaissances issues de la vie quotidienne et les apprentissages scolaires ». In R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux & E. Sander (dir.), *Psychologie du développement*. Paris : Elsevier Masson, p. 217-225.

SANDER E. (2018). « Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3 ». In *Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM (2-3 février 2018)*.

SANDER E., RIVIER C. & NAUD S. (2022). « Résoudre des problèmes pour construire le sens des opérations au-delà des conceptions intuitives : quels énoncés pour quelles progressions d'apprentissage ? ». In *Actes du 47e colloque de la COPIRELEM*. Grenoble : ARPEME, p. 327-344.

SCHEIBLING-SÈVE C., PASQUINELLI E. & SANDER E. (2020). « Assessing conceptual knowledge through solving arithmetic word problems ». *Educational Studies in Mathematics*, n° 103, p. 293-311.

SCHLIEMANN A. D, ARAUJO C., CASSUNDE M. A., MACEDO S. & NICEAS L. (1998). « Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers ». *Journal of Research in Mathematics Education*, n° 29, p. 422-435.

STAUB F. C. & REUSSER K. (1995). « The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems ». In C. A. Weaver, S. Mannes & C. R. Fletcher (dir.), *Understanding and Solving Mathematical*. Hillsdale : Erlbaum, p. 285-306.

THEVENOT C. & BARROUILLET P. (2015). « Arithmetic word problem solving and mental representations ». In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (dir.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford : Oxford library of psychology, p. 158-179.

TIROSH D. & GRAEBER A. (1991). « The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teacher's thinking about division ». *School Science of Mathematics, no 9*1, p. 157-163.

VERGNAUD G. (1982). « A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems ». In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (dir.), *Addition and Substraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale : Erlbaum, p. 39-59.

VICENTE S., SANCHEZ R. & VERSCHAFFEL L. (2019). « Word problem solving approaches in mathematics textbooks: A comparison between Singapore and Spain ». *European Journal of Psychology of Education*, n° 35, p. 567-587. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3>.

VILLANI C., TOROSSIAN C. & DIAS T. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Paris : Ministère de l'Éducation nationale.

VILETTE B., FISCHER J.-P., SANDER E., SENSEVY G., QUILIO S. & RICHARD J.-F. (2017). « Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE ». *Revue française de pédagogie*, n° 201, p. 105-120.

ZHU Y. & FAN L. (2006). « Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States ». *International Journal of Science and Mathematics Education*, n° 4, p. 609-626.